

MATEMATICA E STATISTICA — CORSO B
PROF. MARCO ABATE

PRIMO COMPITINO — FILA A — SOLUZIONI

23 novembre 2006

1. PARTE I

Esercizio 1.1. Se $99 < x < 101$ e $9 < y < 11$, quali sono il valore stimato e l'errore assoluto del quoziente x/y ?

Per calcolare valore medio (o stimato) ed errore del quoziente, bisogna prima calcolare valore medio ed errore di x e y .

Valore medio:

$$VM_x = \frac{99 + 101}{2} = 100, \quad y = \frac{9 + 11}{2} = 10,$$

errore assoluto:

$$EA_x = \frac{101 - 99}{2} = 1, \quad EA_y = \frac{11 - 9}{2} = 1,$$

errore relativo:

$$ER_x = \frac{EA_x}{VM_x} = \frac{1}{100} = 1\%, \quad ER_y = \frac{EA_y}{VM_y} = \frac{1}{10} = 10\%.$$

Siccome gli errori relativi sono piccoli, possiamo usare la formula approssimata per il quoziente. Pertanto:

$$VM_{y/x} = \frac{VM_y}{VM_x} = 10,$$

$$ER_{y/x} = ER_x + ER_y = 11\%,$$

$$EA_{y/x} = ER_{y/x} \cdot VM_{y/x} = 1.1.$$

Esercizio 1.2. Se scegliamo un numero a caso tra i primi 100.000 è più probabile che tale numero sia multiplo di 3 o di 9?

Tutti i numeri multipli di 9 sono anche multipli di 3. Inoltre ci sono numeri multipli di 3 ma non di 9 nei primi 100000 numeri (ad esempio 3). Pertanto è più probabile che un numero a caso fra i primi 100000 sia multiplo di 3.

Esercizio 1.3. Tirando due dadi a sei facce non truccati, quale è la probabilità che la somma dei due punteggi sia un numero pari?

Lo spazio degli eventi è dato dalle coppie ordinate di numeri da 1 a 6, 36 in tutto. 18 di queste hanno somma pari, pertanto la probabilità richiesta è $1/2$.

Oppure, indicando con P l'evento somma pari, e con D_i l'evento dispari sull' i -esimo dado, P_i l'evento pari sull' i -esimo dado, si può calcolare con la legge delle alternative:

$$\begin{aligned} P(P) &= P(P|D_1)P(D_1) + P(P|P_1)P(P_1) = \\ &= P(D_2)P(D_1) + P(P_2)P(P_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Esercizio 1.4. Indichiamo con Ω lo spazio degli eventi di un esperimento probabilistico. Sia $A \subset \Omega$ un sottoinsieme dello spazio degli eventi. Può succedere che A e $\Omega \setminus A$ siano indipendenti?

Due eventi A e B si dicono indipendenti se vale

$$P(A|B) = P(A) = P(A|\text{non } B),$$

$$P(B|A) = P(B) = P(B|\text{non } A).$$

Se A e il suo complementare $\Omega \setminus A = \text{non } A$ sono indipendenti, e entrambi di probabilità non nulla, allora

$$P(A) = P(A|\text{non } A) = 0,$$

assurdo.

Se A è di probabilità 0 o 1, la nozione di indipendenza perde di senso (non si può calcolare una delle probabilità condizionate).

Esercizio 1.5. *Al mercato della frutta i prezzi sono scontati rispetto ai prezzi nei supermercati. Alla chiusura (l'ultima ora di vendita) per vendere la frutta rimanente i commercianti fanno un ulteriore sconto. È più conveniente per chi acquista alla chiusura che il commerciante pratichi uno sconto del 30% all'inizio e uno del 10% alla chiusura o viceversa?*

Gli aumenti/diminuzioni percentuali commutano: pertanto i due prezzi sono uguali. Se P è il prezzo al supermercato, si ha

$$\left(1 + \frac{30}{100}\right) \left(1 + \frac{10}{100}\right) P = \left(1 + \frac{10}{100}\right) \left(1 + \frac{30}{100}\right) P.$$

2. PARTE II

Esercizio 2.1. *Consideriamo le elezioni di un comune italiano alle quali si sono sempre presentati due soli partiti A e B .*

- (1) *Alle elezioni del 1990 il partito A ottenne 12500 voti e il partito B 37500. Calcola le percentuali di voto ottenute dai due partiti.*
- (2) *Nel 1994 il numero dei voti validi fu di 60000 e il partito A conquistò il 20% dei voti. Calcola il numero di voti ottenuti da A e da B .*
- (3) *In realtà sapendo che la percentuali date per le elezioni del 1994 sono state fornite dal Ministero degli Interni a meno della prima cifra decimale (cioè con un errore di più o meno 0.1%) tra quali valori possono variare i voti ottenuti da A ?*
- (4) *Nelle elezioni del 1998 i voti validi furono 80000 e la percentuale dei voti ottenuti dal partito B è diminuita del 25%. Quanti voti ha ottenuto il partito B ?*
- (5) *Nelle elezioni del 2006 i voti validi sono aumentati rispetto a quelli del 2002 del 15% mentre la percentuale del partito A è diminuita del 5%. Si può dire se A ha ottenuto più o meno voti rispetto al 2002 o ci manca qualche dato? Se sicome, altrimenti scrivi il/i dato/i mancanti.*

- (1) I voti totali sono $V_{1990} = 12500 + 37500 = 50000$. Pertanto

$$P_{A,1990} = \frac{V_{A,1990}}{V_{1990}} = 25\%$$

$$P_{B,1990} = \frac{V_{B,1990}}{V_{1990}} = 75\%$$

- (2) Si ha

$$V_{A,1994} = P_{A,1994} V_{1994} = 12000$$

$$V_{B,1994} = V_{1994} - V_{A,1994} = 48000.$$

- (3) $P_{A,1994} = (20 \pm 0.1)\%$, quindi $P_{B,1994} = (80 \pm 0.1)\%$. Pertanto

$$V_{B,1994} = P_{B,1994} V_{1994} = (0.8 \pm 0.001)(60000) = 48000 \pm 60.$$

(4) La nuova percentuale di voti del partito B è data da

$$P_{B,1998} = \left(1 - \frac{25}{100}\right) P_{B,1994} = 60\%.$$

Pertanto

$$V_{B,1998} = P_{B,1998} V_{1998} = 48000.$$

Attenzione! Nonostante la percentuale di consensi del partito B sia scesa, il numero di voti presi è rimasto costante.

(5) Vogliamo confrontare $V_{A,2002}$ e $V_{A,2006}$. Sappiamo che

$$P_{A,2006} = \left(1 - \frac{5}{100}\right) P_{A,2002} = \frac{95}{100} P_{A,2002}$$

$$V_{2006} = \left(1 + \frac{15}{100}\right) V_{2002} = \frac{115}{100} V_{2002}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} V_{A,2006} &= P_{A,2006} \cdot V_{2006} = \frac{95}{100} P_{A,2002} \cdot \frac{115}{100} V_{2002} = \\ &= \frac{95}{100} \cdot \frac{115}{100} P_{A,2002} V_{2002} = \frac{10925}{10000} V_{A,2002}. \end{aligned}$$

Pertanto possiamo dire che i voti ricevuti da A sono aumentati (del 9.25%).

Esercizio 2.2. Il codice di un normale Bancomat è formato da 5 cifre ordinate. Qual è la probabilità di indovinare il codice:

- (1) mettendo numeri completamente a caso?
- (2) Ricordando che le cifre nel codice sono 0, 1, 3, 4, 5?
- (3) Ricordando che le cifre nel codice sono 0, 1, 3, 3, 5?
- (4) Ricordando le prime due cifre nell'ordine sono: 8, 2?

(1) I possibili codici sono i numeri da 00000 a 99999, in totale 100000. Pertanto

$$P = \frac{1}{100000}.$$

(2) Ho 5 possibili posizioni per la cifra 0, 4 per la cifra 1, ... Pertanto ci sono $5! = 120$ codici diversi possibili:

$$P = \frac{1}{120}.$$

(3) Ho 5 possibili posizioni per la cifra 0, 4 per la cifra 1, 3 per la cifra 5, e i 3 vanno messi obbligatoriamente nei posti rimasti. Pertanto ci son $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ codici possibili:

$$P = \frac{1}{60}.$$

(4) I possibili codici sono i numeri da 82000 a 82999, in totale 1000. Pertanto:

$$P = \frac{1}{1000}.$$

Esercizio 2.3. 100g di pollo contengono 10g di grassi, 20g di proteine e hanno un valore energetico di 200 calorie. 100g di mozzarella contengono 20g di grassi, 20g di proteine e hanno un valore energetico di 250 calorie. Sapendo che in frigo ho 3 hg di pollo e 5 hg di mozzarella,

- (1) volendo assumere esattamente 1000 calorie, scegliere le quantità dei due alimenti in modo da assumere la minor quantità di grassi possibile.
- (2) Volendo assumere non più di 50g di grassi e almeno 60g di proteine, quante calorie posso assumere al massimo?

La rappresentazione grafica delle condizioni del problema è richiesta.

Rappresentiamo con x gli etti di pollo mangiati, e con y gli etti di mozzarella mangiati. In entrambi i problemi si ha

$$0 \leq x \leq 3, \quad 0 \leq y \leq 5.$$

Mangiando x etti di pollo e y etti di mozzarella, si assumono

$$G(x, y) = 10x + 20y$$

grammi di grassi,

$$P(x, y) = 20x + 20y$$

grammi di proteine,

$$C(x, y) = 200x + 250y$$

calorie.

(1) Abbiamo l'ulteriore condizione $C(x, y) = 1000$, ovvero

$$4x + 5y = 20.$$

Le condizioni sono rappresentate in figura 1. Vogliamo minimizzare i grassi assunti,

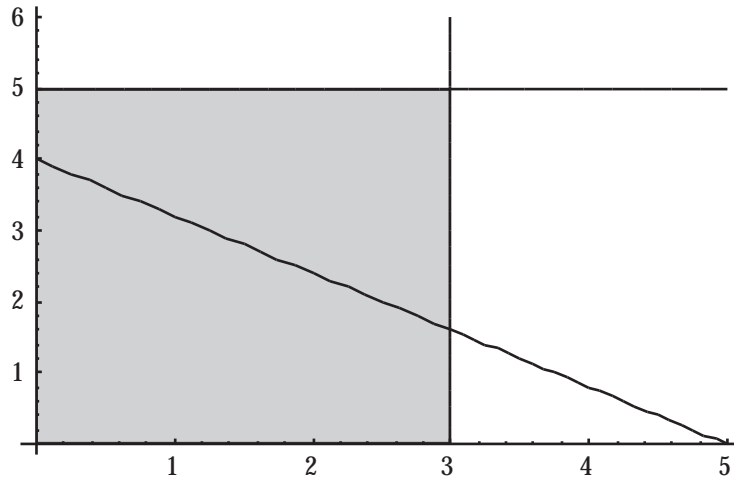


FIGURA 1. Segmento ammissibile. x rappresenta gli etti di pollo mangiati, y gli etti di mozzarella mangiati

ovvero la funzione

$$G(x, y) = 10x + 20y$$

sul segmento ammissibile. Basta valutarla sui due estremi, $(0, 4)$ e $(3, 1.6)$ e scegliere il minimo.

$$G(0, 4) = 80, \quad G(3, 1.6) = 62.$$

Pertanto il minimo si ha mangiando 300g di pollo e 160g di mozzarella.

(2) Abbiamo le ulteriori condizioni

$$G(x, y) \leq 50, \quad P(x, y) \geq 60,$$

ovvero

$$x + 2y \leq 5, \quad x + y \geq 6.$$

Le condizioni sono rappresentate in figura 2. Vogliamo massimizzare le calorie, ovvero la funzione

$$C(x, y) = 200x + 250y$$

sul triangolo ammissibile. Basta valutarla sui vertici, $(3, 1)$, $(3, 0)$, $(1, 2)$, e scegliere il massimo.

$$C(3, 1) = 850, \quad C(3, 0) = 600, \quad C(1, 2) = 700.$$

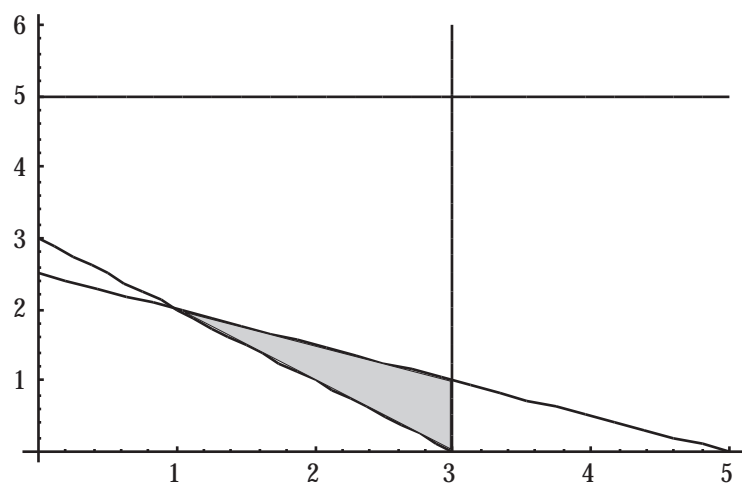


FIGURA 2. Il triangolo ammissibile è evidenziato in grigio. x rappresenta gli etti di pollo mangiati, y gli etti di mozzarella mangiati

Pertanto il massimo si ha mangiando 300g di pollo e 100g di mozzarella.